オービフォールド・カスプ・逆散乱

磯崎　洋
筑波大学数理物質系

錘状特異点を許す非コンパクトな漸近的双曲多様体を考える．これはオービフォールドを含むものである．カスプからの散乱データから多様体を定める逆散乱問題を解説する．

1. 始めに

この小論のテーマは非コンパクトな多様体上での逆散乱問題である．この問題は

- 多様体上のヘルムホルツ方程式の解の無限遠方での漸近挙動を調べることにより S 行列を導入する．
- S 行列から多様体を定める．

という 2 つのステップから成り立っている．多様体としては, 有限部分には任意のトポロジー, 計量を仮定し, 非コンパクトな無限遠近傍（end) においては何らかの意味で標準的な計量に漸近するものを想定する. 無限遠から波を送り, 多様体の有限部分で反射されて無限遠に帰ってくる波を観測する．入射波に反射波を対応させる作用素が S 行列である．S 行列は多様体のすべての情報を含んでいる, と信じられている. 特に S 行列から元の多様体を再構成できるであろう．これが散乱の逆問題と呼ばれるものである. この問題は量子力学における Schrödinger 作用素にその発端をもっているのでまずその場合から話を始める．

2. 量子力学における逆散乱問題

2.1. 時間依存散乱問題. $\mathbf{R}^n$ において定義された Schrödinger 作用素

$$H = H_0 + V(x), \quad H_0 = -\Delta$$

を考えよう．$V(x)$ は実数値で簡単のためにコンパクト台をもつ連続函数とする．H は $[0,\infty)$ を連続スペクトルに持ち, $(-\infty,0]$ に高々有限個の離散的な固有値を持っている．H のスペクトル分解を $E(\lambda)$ とするとき, 次のことが成り立つ．$E((0,\infty))L^2(\mathbf{R}^n)$ は $(E(\lambda)f,f)$ が λ の絶対連続函数であるような $f \in L^2(\mathbf{R}^n)$ の全体と一致する. この空間を H に付随する**絶対連続部分空間**といい $\mathcal{H}_{ac}(H)$ で表す．$L^2(\mathbf{R}^n)$ は次のように直交分解される：

$$L^2(\mathbf{R}^n) = \mathcal{H}_{ac}(H) \oplus \mathcal{H}_{pp}(H),$$

ここで $\mathcal{H}_{pp}(H)$ は H の固有ベクトルの一次結合全体である．$-i\partial_t u = Hu,\ u(0) = f \in \mathcal{H}_{ac}$ の解 $u(t) = e^{-itH}f$ は $t \to \pm\infty$ で $V = 0$ の場合の Schrödinger 方程式の解 $e^{-itH_0}f_\pm$ に漸近する：$\|e^{-itH}f - e^{-itH_0}f_\pm\| \to 0,\ (t \to \pm\infty)$. 作用素 $S : f_- \to f_+$ はユニタリーであることが分かる．この作用素は**散乱作用素**と呼ばれ次のような表示を持つ．フーリエ変換 $\mathcal{F}_0$ を

$$\big(\mathcal{F}_0 f\big)(k,\omega) = (2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbf{R}^n} e^{-ik\omega\cdot x}f(x)dx, \quad k > 0, \quad \omega \in S^{n-1}$$

とおけば, 各 $k > 0$ ごとに $L^2(S^{n-1})$ 上のユニタリー作用素 $S(k)$ が存在し

$$\big(\mathcal{F}_0 S\mathcal{F}_0^* g\big)(k,\omega) = \big(S(k)g(k,\cdot)\big)(\omega), \quad k > 0,\ \omega \in S^{n-1}$$

が任意の $g \in L^2((0,\infty), L^2(S^{n-1}); k^{n-1}dk)$ に対して成り立つ．(以下, $\mathbf{R}$ 内の区間 I とある Hilbert 空間 $\mathbf{h}$ に対して I 上定義された $\mathbf{h}$ に値をとる測度 $\rho(k)dk$ に関する L^2-空間を $L^2(I, \mathbf{h}; \rho(k)dk)$ とおく)．この $S(k)$ を (Heisenberg の) **S 行列**と呼んでいる．$S(k) - I$ は $L^2(S^{n-1})$ 上の積分作用素であり, その積分核 $a(k;\theta,\omega)$ (散乱振幅）は次のような物理的意味を持っている：ω 方向から粒子を入射させた場合, θ 方向に散乱される粒子の割合は $|a(k;\theta,\omega)|^2$ で与えられる．これは観測から得られる量である．$V(x)$ が小さいときには $a(k;\theta,\omega)$ から $S(k)$ を構成できることが知られている．

散乱問題を Schrödinger 方程式 $-i\partial_t u = Hu$ に対して定式化したが, 波動方程式 $\partial_t^2 u + Hu = 0$ に対しても同様の定式化ができる．

2.2. **散乱の定常理論.** 上の散乱問題には H の連続スペクトルに付随した数学的量が深く関係している．固有値問題 $(-\Delta + V)\psi = E\psi$ を固有値 E に対して解けば固有函数 $\psi \in L^2(\mathbf{R}^n)$ が得られる．これは束縛状態, 即ち粒子が $\mathbf{R}^n$ の中の有界な部分のみに存在している状態を記述するものである．$E > 0$ の時には $L^2(\mathbf{R}^n)$ に属する解は存在しない．しかし $L^2(\mathbf{R}^n)$ より広い空間を考えるならばその中に解は存在し, 散乱状態, 即ち粒子が無限遠方に飛び去る状態をよく記述する．その空間として最も適しているのが Agmon-Hörmander によって導入された次の Besov 型空間である．

$$\mathcal{B}^* \ni u \Longleftrightarrow \|u\|_{\mathcal{B}^*}^2 = \sup_{R>1}\frac{1}{R}\int_{|x|<R}|u(x)|^2 dx < \infty.$$

$\mathcal{B}^*$ はある Banach 空間 $\mathcal{B}$ の dual space であり次の包含関係がなりたつ：

$$\mathcal{B} \subset L^2(\mathbf{R}^n) \subset \mathcal{B}^*.$$

各 $k > 0$ に定まる次の空間 $\mathcal{H}(k)$ が重要である．

$$\mathcal{H}(k) = \{u \in \mathcal{B}^*\,;\,(-\Delta + V(x) - k^2)u = 0\}.$$

この Helmholtz 方程式の解空間が Schrödinger 作用素に関するすべての情報を含んでいる．特に次のことが成り立つ：任意の $\varphi_- \in L^2(S^{n-1})$ に対して一意的に

$\varphi_+ \in L^2(S^{n-1})$ と $u \in \mathcal{H}(k)$ が存在し

$$u \simeq C_-(k)\frac{e^{-ikr}}{r^{(n-1)/2}}\varphi_-(\omega) + C_+(k)\frac{e^{ikr}}{r^{(n-1)/2}}\varphi_+(\omega)$$

が成り立つ. ここで $C_\pm(k)$ は k のみに依存する定数,

$$\varphi_+ = JS(k)\varphi_-, \quad \big(J\psi\big)(\omega) = \psi(-\omega),$$

であり $f \simeq g$ は $\lim_{R\to\infty} \frac{1}{R}\int_{|x|<R} |f(x) - g(x)|^2 dx = 0$ を意味する.

このことの背後には H に付随する一般化されたフーリエ変換が深く関係している. $R(z) = (H - z)^{-1}$ とする. $k^2 \in \sigma(H)$ であるから $R(k^2)$ は通常の意味では存在しないのだが $\mathcal{B}$ から $\mathcal{B}^*$ の作用素として

$$R(k^2 \pm i0) \in \mathbf{B}(\mathcal{B}\,;\mathcal{B}^*)$$

が存在する. さらに $f \in \mathcal{B}$ に対して $\widetilde{f}_\pm(k,\omega) \in L^2(S^{n-1})$ が存在し, 次の漸近展開がなりたつ：

$$R(k^2 \pm i0)f \simeq \widetilde{C}_\pm(k)\frac{e^{\pm ikr}}{r^{(n-1)/2}}\widetilde{f}_\pm(k,\omega).$$

作用素 $\mathcal{F}_\pm(k) \in \mathbf{B}(\mathcal{H}_+\,; L^2(S^{n-1}))$ を

$$\big(\mathcal{F}_\pm(k)f\big)(\omega) = \widetilde{f}_\pm(k,\omega)$$

によって定義し, さらに $\big(\mathcal{F}_\pm f\big)(k,\omega) = \big(\mathcal{F}_\pm(k)f\big)(\omega)$ とおけば

(1) $\mathcal{F}_\pm$ は $\mathcal{H}_{ac}(H)$ から $L^2((0,\infty), L^2(S^{n-1})\,; k^{n-1}dk)$ へのユニタリー作用素であり,

(2) $\mathcal{F}_\pm(k)^* \in \mathbf{B}(L^2(S^{n-1})\,;\mathcal{H}^*)$ は次の意味で H の固有作用素であり

$$(-\Delta + V - k^2)\mathcal{F}_\pm(k)^*\psi = 0, \quad \forall\psi \in L^2(S^{n-1}),$$

(3) 任意の $f \in \mathcal{H}_{ac}(H)$ に対して反転公式が成りたつ：

$$f = \int_0^\infty \mathcal{F}_\pm(k)^*\mathcal{F}_\pm f(k)\, k^{n-1}dk.$$

さらに上の空間 $\mathcal{H}(k)$ はこのフーリエ変換によって特徴づけられる：

$$\mathcal{H}(k) = \mathcal{F}_\pm(k)^* L^2(S^{n-1}).$$

上に述べたことをまとめよう. S^{n-1} は Euclid 空間 $\mathbf{R}^n$ の無限遠境界である. また $\mathcal{F}^{(\pm)}(k)^*\psi$ は $V(x) = 0$ のとき

$$\int_{S^{n-1}} e^{\pm ik\omega\cdot x}\psi(\omega)d\omega$$

であり, これは無限遠境界における Fourier 変換, あるいは **Poisson 積分**と呼ばれるものである. よって一般に次のことが期待される.

- Schrödinger 作用素に対して無限遠境界上の Poisson 積分が存在し,
- 適当な減少度をもつ Helmholtz 方程式の解空間は Poisson 積分で特徴づけられ,

- S 行列はこの空間に属する Helmholtz 方程式の解の無限遠における挙動によって定義される.

2.3. **逆散乱問題.** $S(k)$ からポテンシャル $V(x)$ を定める逆問題は 1950 年代前半, 1 次元の半直線の場合に Gel'fand-Levitan-Marchenko によって解決された. 高次元の場合はまず Faddeev によって $S(k)$ の $k \to \infty$ での極限から $V(x)$ が再構成されることが示された. また 1980 年代後半には $n \geq 3$ のとき一つの $k > 0$ に対する $S(k)$ から $V(x)$ が再構成されることが示された. $n = 2$ のときも可能であることが示されたのは最近のことである.

媒質による散乱の問題に対しても同じ定式化ができる. $\mathbf{R}^n$ に Riemann 計量 $ds^2 = g_{ij}(x)dx^i dx^j$ を与え, 波動方程式あるいは Schrödinger 方程式の解の無限遠での挙動から Riemann 計量を定めるのがこの場合の逆問題である. Riemann 計量を定める問題はポテンシャルに対するものよりもはるかに困難であり, 1990 年代以降まで待たなくてはならなかった.

逆散乱問題に関する survey として [7] がある. また最近の発展も合わせた解説 [10] も参照されたい.

3. 非コンパクト多様体上のラプラシアン

非コンパクト多様体の例として $\mathcal{M} = (0, \infty) \times M$, その計量は $ds^2 = (dr)^2 + f(r)g_M$, ただし M はコンパクト多様体で g_M はその計量, という形のものを想像するのは自然であろう. このことを考慮して次のような連結な n-次元 Riemann 多様体 $\mathcal{M}$ を考えよう.

(C-1) $\mathcal{M} = \mathcal{K} \cup \mathcal{M}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{M}_N$, ただし $\overline{\mathcal{K}}$ はコンパクト.
(C-2) $\mathcal{M}_i$ は $(1, \infty) \times M_i$ に微分同相でその計量は $(dr)^2 + f_i(r)g_{M_i}$ で与えられる. ただし M_i はコンパクト $n-1$ 次元多様体, g_{M_i} は M_i 上の Riemann 計量である.

M_i 内に境界 $S_i = \{r = 2\}$ を設け, S_i 上に Neumann 境界条件を与えた $(2, \infty) \times M_i$ 上の Laplacian を $H_{0,i} = -\Delta_{\mathcal{M}_i}$ とする.

(C-3) $\sigma(H_{0,i}) = [E_i, \infty)$ とし $E_1 = \cdots = E_N$ を仮定する.

$H = -\Delta_{\mathcal{M}} - E$, $(E := E_i)$, $H_{free,i} = H_{0,i} - E_i$ とおく. ただし $\Delta_{\mathcal{M}}$ は $\mathcal{M}$ 上のラプラシアンである. H の離散スペクトルは $(-\infty, 0)$ にある. 連続スペクトル $\sigma_c(H) = [0, \infty)$ の中に固有値が埋め込まれている場合もある. 非コンパクト部分 $\mathcal{M}_i$ は $\mathcal{M}$ の end と呼ばれる. $\mathcal{M}$ の性質は無限遠における体積増大度 $f_i(r)$ に大きく依存する.

例 $M_i = S^{n-1}$ とする.
(1) $f_i(r) = e^{2r}$. このとき $\mathcal{M}_i$ は双曲空間の体積無限大の無限遠近傍である.(これを regular end と呼ぼう).

(2) $f_i(r) = r^2$. このとき $\mathcal{M}_i$ は Euclid 計量を与えた $\mathbf{R}^n$ の外部領域である.
(3) $f_i(r) = 1$. このとき $\mathcal{M}_i$ は柱状領域である. すべての end がこのようなものであるとき $\mathcal{M}$ は物理的には導波管である.
(4) $f_i(r) = e^{-2r}$. このとき $\mathcal{M}_i$ は双曲空間の体積有限の無限遠近傍, すなわち cusp である.

上の4つの例は多様体としてごく基本的なものであり, また体積増大度とスペクトルの関連の上でも興味深い. 例えばひとつの end が (1), (2) のようであれば H は連続スペクトルの中に埋め込まれた固有値を持たないが, すべての end が (3),(4) のようであれば埋蔵固有値が存在する.

上のような多様体に対して §1 の Schrödinger 作用素のときと同様にして S 行列を定義できる. このときの S 行列は $N \times N$ の行列型のユニタリー作用素である. ここで N は end の個数である. end を一つ固定し (例えば $\mathcal{M}_1$), S 行列の対応する成分 $S_{11}(k)$ を考える. 逆問題を次のように設定する.

> 2つの多様体 $\mathcal{M}^{(1)}$, $\mathcal{M}^{(2)}$ が上のようであり, すべての $k > 0$ に対して $S_{11}^{(1)}(k) = S_{11}^{(2)}(k)$ のとき $\mathcal{M}^{(1)}$ と $\mathcal{M}^{(2)}$ は等長であるか?

物理的な表現をすれば次のようになる.

> 多様体の無限遠から波を送り, 無限遠に帰ってくる波を観測する. 観測結果から多様体を同定できるか?

我々の得ている答えは以下のようなものである. $\mathcal{M}_1^{(1)}$ と $\mathcal{M}_1^{(2)}$ が等長であると仮定する.

- 各 end が (2) の型である場合 (asymptotically Euclidean case) 正しい.
- 各 end が (3) の型である場合 (cylindrical end, or waveguide case) 正しい.
- 各 end が (1) または (4) の型である場合 (asymptotically hyperbolic case), $\mathcal{M}_1^{(1)}$ と $\mathcal{M}_1^{(2)}$ が共に regular end なら正しい.
- 各 end が (1) または (4) の型である場合 (asymptotically hyperbolic case), $\mathcal{M}_1^{(1)}$ と $\mathcal{M}_1^{(2)}$ が共に cusp のとき正しくはないが, generalized S-matrix (後に定義する) がすべての k に対して一致すれば $\mathcal{M}^{(1)}$ と $\mathcal{M}^{(2)}$ は等長である.

以下, 上の最後の場合について述べる. この事実は C^∞ な多様体のみならず orbifold, さらにもっと一般な錘状特異点をもつ多様体に対して成立するのでそれらの解説を主な目的とする.

4. 2 次元双曲多様体

4.1. Fuchs 群の作用と商空間. 上半平面 $\mathbf{H}^2 = \mathbf{C}_+$ への $SL(2, \mathbf{C})$ の作用を考える:

$$SL(2, \mathbf{C}) \times \mathbf{C}_+ \ni (\gamma, z) \to \gamma \cdot z = \frac{az + b}{cz + d} \in \mathbf{C}_+.$$

離散群 $\Gamma \subset SL(2, \mathbf{C})$ (Fuchsian group) をとり $z, z' \in \mathbf{C}_+$ を次のように同一視する：

$$z \equiv z' \Longleftrightarrow \exists \gamma \in \Gamma \text{ s.t. } z = \gamma \cdot z'.$$

$\mathbf{H}^2$ の双曲計量

$$ds^2 = \frac{(dx)^2 + (dy)^2}{y^2}$$

を誘導することにより商空間 $\mathcal{M}_\Gamma = \Gamma \backslash \mathbf{H}^2$ は "リーマン多様体" とみなすことができる．ここで " " をつけたのは, 特異点が生ずる可能性があるからであるが, そのことについては後に述べよう. 最も初歩的な例を挙げる.

例 1. $\mathbf{C}_+$ への作用が平行移動 $z \to z + 1$ である場合. このとき $\mathcal{M}_\Gamma = (-1/2, 1/2) \times (0, \infty)$ となり, 計量は $((dx)^2 + (dy)^2)/y^2$ である．この多様体は 2 つの end を持つ. $(-1/2, 1/2) \times (0, 1)$ の部分は体積無限大であり, **regular end** と呼ぼう．$(1/2, 1/2) \times (1, \infty)$ の部分は体積有限であり, **cusp** と呼ばれる.

例 2. $\mathbf{C}_+$ への作用が拡大 $z \to \lambda z$ $(\lambda > 1)$ の場合．商多様体は 2 つの end をもち funnel と呼ばれる．虚軸上の座標 t と虚軸から測った測地距離 r を用いればリーマン計量は $ds^2 = (dr)^2 + (\cosh r)^2 (dt)$ であるが, $y = 2e^{-r}$ とおけばこれは $ds^2 = (dy/y)^2 + (1/y + y/4)^2 (dt)^2$ と書き換えられ, これは例 1 に与えた regular end の摂動と見做すことができる.

Definition 4.1. Γ 或いは $\mathcal{M}_\Gamma$ が幾何学的に有限 (**geometrically finite**) とは $\mathcal{M}_\Gamma$ が有限個の測地線による辺を持つ凸な多角形であることである．これは Γ が有限生成であることと同値である.

Theorem 4.2. $\mathcal{M}_\Gamma$ が *geometrically finite* ならば *compact set* K が存在し $\mathcal{M}_\Gamma \setminus K$ は有限個の *funnel* と *cusp* から成る.

この定理により geometrically finite なものに限れば 2 次元双曲多様体の end は有限個で, それらは cusp と摂動された regular end から成ると考えてよい.

Definition 4.3. Fucshian group Γ が第 1 種であるとは $\mathcal{M}_\Gamma$ が体積有限であることである．このとき $\mathcal{M}_\Gamma$ は geometrically finite である.

数論には第 1 種 Fuchs 群がよく現れる．このとき $\mathcal{M}_\Gamma$ の end は cusp のみから成る．通常, この空間をコンパクト化し, コンパクトリーマン面と見做す．このとき $\mathcal{M}_\Gamma$ 上の有理型函数体は代数函数体である．よく知られているように, コンパクトリーマン面と代数函数体には 1 対 1 対応がある．このことは大きく見れば

空間はその上の函数の集合から定まる

ということの例証である．一般のリーマン多様体に対しては "その上の函数の集合" とは何であろうか？ 物理との対応からすれば

Helmholtz 方程式の解空間

がそれであろう. 詳しくは Helmholtz 方程式の解の無限遠での漸近挙動がそれであり, それを表現しているのが S 行列である.

4.2. 楕円型特異点.

Definition 4.4. Γ を Fuchs 群とする. $\gamma \in \Gamma$ が elliptic とは map $z \to \gamma \cdot z$ が $\mathbf{C}_+$ に唯一つの固定点を持つことである. これは $|\mathrm{tr}\,\gamma| < 2$ と同値である.

よく知られた例として $\Gamma = SL(2, \mathbf{Z})$ を挙げよう. Figure 1 が基本領域であるが, $z = i, e^{\pi/3}, e^{2\pi/3}$ が elliptic fixed points である.

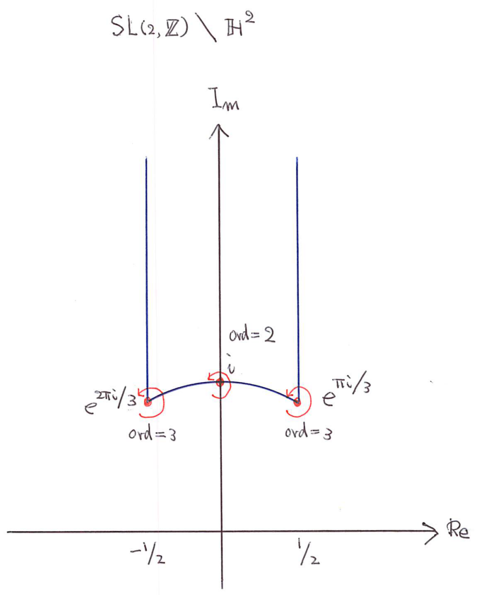


Figure 1. Dirichlet Region for $PSL(2, \mathbf{Z})$

$\mathcal{M}_{sing}$ を $\mathcal{M}_\Gamma$ の elliptic fixed points 全体, $\mathcal{M}_{reg} = \mathcal{M}_\Gamma \setminus \mathcal{M}_{sing}$ とおく．$p \in \mathcal{M}_{sing}$ に対してその isotropy group を

$$\mathcal{I}(p) = \{\gamma \in \Gamma\,;\,\gamma\cdot p = p\}$$

とする．$\mathcal{M}_{reg}$ の局所座標は $\mathbf{C}_+$ のものをそのまま用いればよい．計量 $((dx)^2 + (dy)^2)/y^2$ もそのまま誘導されるので $\mathcal{M}_{reg}$ は C^∞- Riemannian manifold である．

$\mathcal{M}_{sing}$ には次のような特徴がある．$p \in \mathcal{M}_{sing}$ のまわりで適当な局所座標をとれば $\mathcal{I}(p)$ は有限な回転群になる．p のまわりでは $\mathcal{M}_\Gamma$ は sector であり, 被覆空間 $\{z \in \mathbf{C}\,;\,|z| < 1\}$ をもち, そこには双曲計量が入る．従って p のまわりでは $\mathcal{M}_\Gamma$ は (sector の２辺を identify することにより）cone の構造をもっている. さらに適当な (analytic でない) 座標系をとることにより計量は

$$ds^2 = (dr)^2 + \frac{1}{m^2}(\sinh r)^2(d\theta)^2, \quad m = {}^\sharp\mathcal{I}(p)$$

となる.

以上の議論から我々が問題にしたい曲面は次のようなものである.

(1) 有限部分には有限個の特異点を持ち, その周りでは錘状の構造を持つ.

(2) 有限個の end を持ち, それらは regular であるか cusp である.

それを表示すれば次の図のようになる.

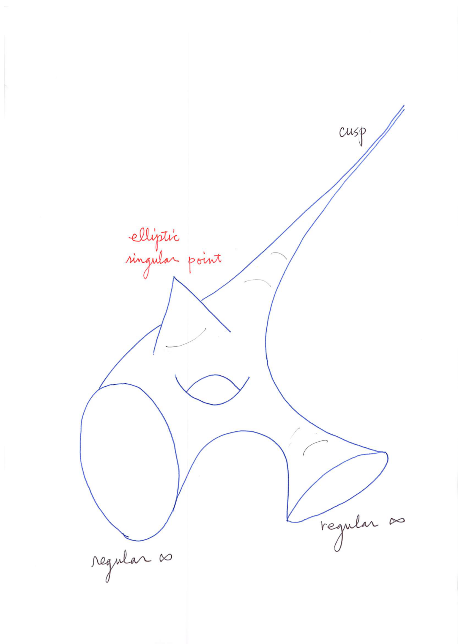


Figure 2. Surface with conical singularties

これを念頭におきながら考えたい多様体を設定する.

5. 錘状特異点をもつ曲面

2 次元の連結な C^∞-多様体 $\mathcal{M}$ を考える. それは open sets $\mathcal{K}, \mathcal{M}_1, \cdots, \mathcal{M}_N$ の union であり：

$$\mathcal{M} = \mathcal{K} \cup \mathcal{M}_1 \cup \cdots \mathcal{M}_N$$

次の仮定を満たすものとする.

(A-1) ある $1 \leq \mu \leq N$ が存在し, $1 \leq i \leq \mu$ に対しては $\mathcal{M}_i$ は $S^1 \times (1, \infty)$ に微分同相で

$$ds^2 = \frac{(dx)^2 + (dy)^2}{y^2}$$

という計量を持つ.

(A-2) $\mu + 1 \leq i \leq N$ に対しては $\mathcal{M}_i$ は $S^1 \times (0, 1)$ に微分同相で, その計量は

$$ds^2 = \frac{(dx)^2 + (dy)^2 + A(x, y, dx, dy)}{y^2},$$

$$A = a(x, y)(dx)^2 + 2b(x, y)dxdy + c(x, y)(dy)^2$$

と表され, $a(x, y), b(x, y), c(x, y)$ は

$$|\partial_x^\alpha (y\partial_y)^n d(x, y)| \leq C_{\alpha n}(1 + |\log y|)^{-m(\alpha,n)-1-\epsilon}$$

を満たす. ここで $\epsilon > 0$ かつ

$$m(\alpha, n) = \min (|\alpha| + 1, 1).$$

(A-3) $\overline{\mathcal{K}}$ はコンパクト

(A-4) 有限集合 $\mathcal{M}_{sing} \subset \mathcal{M}$ が存在し $\mathcal{M} \setminus \mathcal{M}_{sing}$ においては $\mathcal{M}$ は C^∞-Riemann 計量 g を持つ. さらに任意の $p \in \mathcal{M}_{sing}$ に対して開集合 $\widetilde{U}_p \subset \mathbf{R}^2$ が存在し, $\widetilde{U}_p$ は $[0, \epsilon) \times S^1$ と微分同相で, 次のような Riemann 計量 $\widetilde{g}_p$ を持つ:

$$\widetilde{g}_p = (dr)^2 + C_p r^2 (1 + h_p(r, \theta))(d\theta)^2, \quad 0 < r < \epsilon, \quad 0 \leq \theta < 2\pi,$$

$$C_p > 0, \quad C_p \neq 1, \quad h_p(r, \theta) \to 0 \quad (r \to 0).$$

C_p は 1 でない定数であることを強調しよう. $\mathcal{M}_i$ は $1 \leq i \leq \mu$ に対しては cusp であり, $\mu + 1 \leq i \leq N$ に対しては regular end である.

Δ_g を $\mathcal{M}$ の Laplacian とし

$$H = -\Delta_g - \frac{1}{4}$$

とおく. H の自己共役拡張 (Friedrichs 拡張) が 2 次形式から得られる. $\sigma_{ess}(H) = [0, \infty)$ である. $\mathcal{M}$ が regular な end を一つでも持てば $\sigma_p(H) \cap (0, \infty) = \emptyset$ であるが, すべての end が cusp なら H は $(0, \infty)$ の中に固有値を持つことがある.

$\mathcal{M}$ の単位分解 $\{\chi_j\}_{j=0}^N$ を次のようにとる. χ_0 はコンパクト台をもち $\mathcal{K}$ 上 1 である. χ_i $(1 \leq i \leq N)$ は $\mathcal{M}_i$ に台を持ち, $\chi_i = y,$ $(y > 2)$ である.

$\mathcal{B}^*$ とは $u \in L^2_{loc}(\mathcal{M})$ であり, 各 end において

$$\sup_{R>e} \frac{1}{\log R} \int_{\frac{1}{R}<y<\log R} \chi_i(y) \|u(\cdot, y)\|^2_{L^2(S^1)} \frac{dy}{y^2} < \infty$$

を満たすもの全体とする.

各 end $\mathcal{M}_i$ において

$$\lim_{R\to\infty} \frac{1}{\log R} \int_{\frac{1}{R}<y<\log R} \chi_i(y) \|u(\cdot, y) - v(\cdot, y)\|^2_{L^2(S^1)} \frac{dy}{y^2} = 0$$

が成り立つとき $u \simeq v$ と書く.

Helmholtz 方程式の解空間を

$$\mathcal{H}(k) = \{u \in \mathcal{B}^* \,;\, (H - k^2)u = 0\}, \quad k > 0, \quad k^2 \notin \sigma_p(H)$$

によって定義する. $\mathcal{H}(k)$ の元を physical solution ということにしよう. 無限遠における L^2-空間は

$$\begin{cases} \mathbf{C} & \text{for the cusp} \\ L^2(S^1) & \text{for the regular end} \end{cases}$$

である. 無限遠における散乱データの空間を

$$\mathbf{h}_\infty = \sum_{i=1}^{\mu} \mathbf{C} \oplus \sum_{i=\mu+1}^{\infty} L^2(S^1)$$

とおく.

$\mathbf{R}^n$ における球面波

$$\frac{e^{\pm ikr}}{r^{(n-1)/2}}$$

に対応するものは双曲空間においては

$$y^{(n-1)/2\mp ik}, \quad n = 2$$

である. 任意の $\psi^{(-)} = (\psi_1^{(-)}, \cdots, \psi_N^{(-)}) \in \mathbf{h}_\infty$ に対して $u \in \mathcal{H}(k)$ と $\psi^{(+)} = (\psi_1^{(+)}, \cdots, \psi_N^{(+)}) \in \mathbf{h}_\infty$ が唯一つ存在し

$$\begin{aligned} u \simeq\ & \omega_-(k) \sum_{j=1}^{\mu} \chi_j y^{1/2+ik} \psi_j^{(-)} + \omega_-^{(c)}(k) \sum_{j=\mu+1}^{N} \chi_j y^{1/2-ik} \psi_j^{(-)} \\ & - \omega_+(k) \sum_{j=1}^{\mu} \chi_j y^{1/2-ik} \psi_j^{(+)} + \omega_+^{(c)}(k) \sum_{j=\mu+1}^{N} \chi_j y^{1/2+ik} \psi_j^{(+)} \end{aligned} \tag{5.1}$$

という展開が成り立つ. S 行列 $\mathcal{S}(k) = \big(\mathcal{S}_{ij}(k)\big)$ を

$$\mathcal{S}(k) : \mathbf{h}_\infty \ni \psi^{(-)} \to \psi^{(+)} \in \mathbf{h}_\infty$$

によって定義する. これは $\mathbf{h}_\infty$ 上のユニタリー作用素であり $\mathcal{S}_{ij}(k)$ は $\mathbf{h}_i$ から $\mathbf{h}_j$ への有界作用素である. ただし $\mathcal{M}_i$ が cusp なら $\mathbf{h}_i = \mathbf{C}$, $\mathcal{M}_i$ が regular end なら $\mathbf{h}_i = L^2(S)$ である. 後に導入する一般化された S 行列と区別するために上の S 行列を**物理的 S 行列** と呼ぶ.

6. Regular end からの逆散乱

物理的 S 行列は regular な end においては逆問題を解くのに十分な情報量を含んでいる.

Theorem 6.1. 上のような多様体 $\mathcal{M}^{(1)}, \mathcal{M}^{(2)}$ とそれに付随する S 行列 $S^{(1)}(k), S^{(2)}(k)$ が与えられたとする. ある n_1, n_2 に対して, *end* $\mathcal{M}^{(1)}_{n_1}$ と $\mathcal{M}^{(2)}_{n_2}$ が *regular infinity* をもち, かつそれらは等長とする. さらに

$$S^{(1)}_{n_1 n_1}(k) = S^{(2)}_{n_2 n_2}(k), \quad \forall k^2 > 0.$$

が成り立つものとする. このとき $\mathcal{M}^{(1)}$ と $\mathcal{M}^{(2)}$ は等長であり, 特異点の周りの錘状構造も一致する.

上の定理において $\mathcal{M}^{(1)}$, $\mathcal{M}^{(2)}$ の end の個数は等しいとは仮定していない.

漸近的双曲多様体上のスペクトル・逆散乱理論を [8] にまとめた. 定理 6.1 の証明はその中にある.

7. 証明の key idea

7.1. **順問題.** 順問題とは S 行列の構成までの議論を指す. 重要なステップは

- 極限吸収原理
  i.e. レゾルベントの境界値の存在

$$R(k^2 \pm i0) \in \mathbf{B}(\mathcal{B}; \mathcal{B}^*),$$

- スペクトル表示
  i.e. 次のような部分等距離作用素であって

$$\mathcal{F}^{(\pm)} : L^2(\mathcal{M}) \to L^2((0,\infty); \mathbf{h}_\infty; dk),$$

  H を対角化するもの

$$\left(\mathcal{F}^{(\pm)} H f\right)(k) = k^2 \left(\mathcal{F}^{(\pm)} f\right)(k).$$

- レゾルベントの無限遠での漸近展開

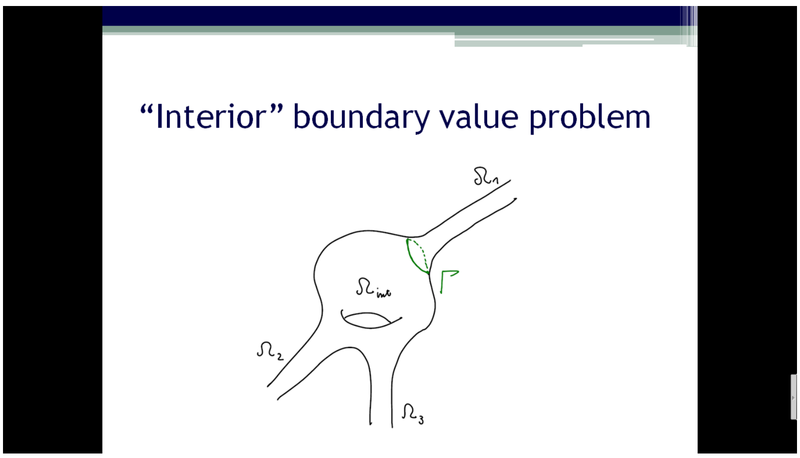
$$R(k^2 \pm i0) f \simeq C_\pm(k) y^{\frac{1}{2} \mp ik} (\mathcal{F}^{(\pm)} f)(k).$$

である. これらは部分積分による a-priori 評価と Bessel 函数の漸近展開によってなされる.

7.2. **逆問題.** S 行列から多様体を構成する部分が逆問題である．そのための方法が Belishev [2] による**境界制御法 (Boundary control method)** である．最初の論文はユークリッド空間の中でのものだったが, この方法は Belishev-Kurylev [3] によってコンパクトリーマン多様体上に拡張された．Katchalov-Kurylev-Lassas [12] はその詳しい解説である. 我々は境界制御法を非コンパクト多様体上に拡張して用いる.

境界制御法は有界領域の波動方程式を解の境界値から決定するものである．スペクトルデータ（固有値と固有函数の境界での挙動）から波動方程式に対する Dirichlet-Neumann 写像（境界上における Dirichlet-data に解の Neumann-data を対応させる写像．同様に Neumann-Dirichlet 写像も考えられる）を構成し, 波動方程式の解を通じて多様体とその計量を再構成するのが基本的 idea である．逆問題に関しては Gel'fand-Levitan 理論がよく知られているが, それはラプラシアンのスペクトル量の解析接続に依拠している．境界制御法は波動方程式の解の有限伝搬性, とくに解と測地線との関係に大きく依拠するものであり, このことがリーマン計量の再構成への鍵となった.

非コンパクト領域での問題と関係させるために, 下図のようにまず end $\mathcal{M}_1$ 内に人為的な境界 $\Gamma = \{y = 2\}$ を想定し, $\mathcal{M}$ を "外部領域" $\mathcal{M}_{ext} = \mathcal{M}_1 \cap \{y > 2\}$ と " 内部領域 "$\mathcal{M}_{int} = \mathcal{M} \setminus \mathcal{M}_{ext}$ に分ける. このとき $\mathcal{M}_1$ に対応する S 行列の成分 $\mathcal{S}_{11}$ から内部領域における Dirichlet-Neumann map が定まることが分かる．その後はコンパクト領域上の波動方程式と並行した議論によって多様体を再構成できる.



8. Cusp からの逆散乱

例えば第 1 種 Fuchs 群に対しては end は cusp のみからなる．よって cusp からの逆散乱も重要である．しかし cusp は連続スペクトルに対しては 1 次元部分空間としてしか貢献せず, 対応する S 行列も 1 個の複素数であり, 多様体全体を一意的に定めることはできない．実際, Zelditch [17] は（物理的な）S 行列は一致するが等長でない双曲多様体の例を構成している．

cusp から得られる情報量を増やすために Helmholtz 方程式の解空間を拡大することを考える. ここで次の Helgason の定理を思い出そう．この定理を直接使う訳ではないが, 背後にある idea を暗示している．

Theorem 8.1. *Poincaré disc* における *Helmholtz* 方程式 $-\Delta_g u = \lambda u$ の任意の解は *Poisson* 積分

$$u = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{1-|z|^2}{|e^{\sqrt{-1}\theta}-z|}\right)^s f(\theta)d\theta, \quad \lambda = s(1-s)$$

で書ける．ここで $f(\theta)$ は境界上の *Sato* 超函数である．

この定理は Kashiwara-Kowata-Minemura-Okamoto-Oshima-Tanaka [11] によって一般の対称空間に拡張されている．

$\mathcal{M}_1$ においては, そこでは cusp をもつのだが, Helmholtz 方程式は

$$-y^2(\partial_y^2+\partial_x^2)u - \frac{1}{4}u = k^2 u.$$

という形になる．u を Fourier 級数

$$u(x,y) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} e^{2\pi i n x} u_n(y),$$

に展開すれば

$$y^2(-\partial_y^2 + (2ny)^2)u_n - \frac{1}{4}u_n = k^2 u_n,$$

$$u_n(y) = \begin{cases} \tilde{a}_n y^{\frac{1}{2}} I_{-ik}(2\pi|n|y) + \tilde{b}_n y^{\frac{1}{2}} K_{ik}(2\pi|n|y), \ n \neq 0, \\ a_0 y^{\frac{1}{2}-ik} + b_0 y^{\frac{1}{2}+ik}, \ n = 0. \end{cases}$$

となる．ここで I_ν, K_ν は変形 Bessel 函数で

$$I_\nu(z) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi z}} e^z, \quad z \to \infty,$$

$$K_\nu(z) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2z}} e^{-z}, \quad z \to \infty,$$

という挙動をする．

よって cusp においては指数的に増大し, regular end においては $y^{1/2\mp ik}$ という挙動をする Helmholtz 方程式の解を構成できる．さらに cusp においては

$$\begin{aligned} u(x,y) \sim a_0 y^{1/2-ik} &+ \sum_{n\neq 0} a_n e^{inx+|n|y} \\ &+ b_0 y^{1/2+ik} + \sum_{n\neq 0} b_n e^{inx-|n|y}. \end{aligned}$$

という展開を持っている．

写像

$$\mathcal{S}_{11}(k) : \{a_n\}_{n\in\mathbf{Z}} \to \{b_n\}_{n\in\mathbf{Z}}$$

を generalized S-matrix (の (11) 成分）と呼ぼう．

Remark 1　Helmholtz 方程式の指数的に増大する解を用いることは逆問題において頻繁に利用される方法である．

Remark 2　一般化された S 行列は無限次元行列であり, 通常の（物理的） S-行列はその (00) 成分である．

Remark 3　$\{a_n\}$ は指数的に減衰する数列であるが, $\{b_n\}$ は指数的に増大する．これを Fourier 級数と同一視すれば, Sato 超函数より広いクラスの analytic functional を扱っていることになる．

以上の準備のもとに主定理を述べる．

Theorem 8.2. *上のような多様体 $\mathcal{M}^{(1)}, \mathcal{M}^{(2)}$ と付随する 一般化された S 行列 $\mathcal{S}^{(1)}(k), \mathcal{S}^{(2)}(k)$ が与えられたとする．各 end $\mathcal{M}_1^{(1)}$, $\mathcal{M}_1^{(2)}$ は cusp であり,*

$$\mathcal{S}_{11}^{(1)}(k) = \mathcal{S}_{11}^{(2)}(k),$$
$$\forall k^2 \in (0,\infty) \setminus \big(\sigma_p(H^{(1)}) \cup \sigma_p(H^{(2)})\big).$$

が成り立つものとする．このとき $\mathcal{M}^{(1)}$ と $\mathcal{M}^{(2)}$ は等長であり, 錘状特異点の構造も一致する．

特に geometrically finite な Fuchs 群は (例えば第 1 種 Fuchs 群は) 一般化された S 行列から決定される．

定理 8.2 の証明は [9] にある．

9. 高次元 ORBIFOLD

3 次元においては $SL(2,\mathbf{C})$ が $\mathbf{R}^3_+$ に 4 元数 (quarternion) を通じて作用する:

$$\mathbf{z} = x_1\mathbf{1} + x_2\mathbf{i} + x_3\mathbf{j} = \begin{pmatrix} x_1 + ix_3 & x_2 \\ -x_2 & x_1 - ix_3 \end{pmatrix},$$

$$\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbf{C}),$$

$$\mathbf{z} \to \gamma \cdot \mathbf{z} = (a\mathbf{z}+b)(c\mathbf{z}+d)^{-1}.$$

$SL(2,\mathbf{C})$ の離散部分群を用いて 3 次元双曲 orbifold を構成できる．例えば Picard 群 $\mathbf{Z}[i] = \mathbf{Z} + i\mathbf{Z}$, これは Gauss の整数環であるが：

$$SL(2,\mathbf{Z}+i\mathbf{Z})\backslash\mathbf{H}^3$$

の作用から modular surface $SL(2,\mathbf{Z})\backslash\mathbf{H}^2$ の 3 次元 analogue ができる．Figure 3 はその基本領域である．

3 次元における新たな問題は

- 特異点は孤立しておらず, $\mathcal{M}$ の非有界な部分集合をなす．
- 無限遠多様体は C^∞-多様体ではなく 2 次元 orbifold になる．

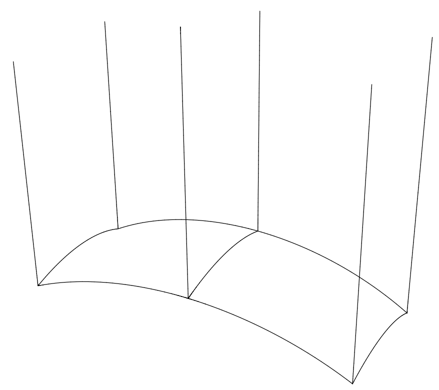


FIGURE 3. Dirichlet Region for $PSL(2,\mathbf{Z}[i])$

より詳しくは楕円型固定点の集合は 1 次元曲線をなし

- それぞれ $\subset SO(2)$ の有限部分群を固定群に持ち,
- それらは交点を持ち,
- あるものは無限遠にまで伸び, 無限遠多様体は 2 次元 orbifold となる．

これらのことを考慮して n 次元特異多様体を次のように定義する．

$n=1$ に対しては, それは通常の C^∞-多様体である．$n \geq 2$ の時, M が n 次元の特異多様体であるとは

- 任意の $x_0 \in M$, に対して開集合 $U \subset M$ が存在し

$$x_0 \in U, \quad U \setminus \{x_0\} \simeq (0, r_0) \times N,$$

が成り立つ．ここで N は $n-1$ 次元の特異多様体である．

- $U \setminus \{x_0\}$ においては

$$ds^2 = dr^2 + \psi(r,y) r^2 h_N(y),$$

$$\psi \in C^\infty([0,r_0] \times N) \cap C^\infty([0,r_0] \times N_{reg},$$

なる計量を持つ．ここで $\psi(y) > 0$ で $h_N(y)$ は N の計量である．

レゾルベント評価を得るには model space を導入し，無限遠多様体上での固有函数展開によって問題を１次元に帰着させる．無限遠多様体は C^∞-manifold ではないが，それと同様にラプラシアンの固有ベクトルの完全系を持つので議論に支障はない．classical な Eidus による部分積分の方法によって極限吸収原理を示すことができる．逆問題は２次元と同様に境界制御法を用いる．次元に関して帰納的に特異性の構造を決定できる．

References

[1] S. Agmon, *Spectral theory of Schrödinger operators on Euclidean and non-Euclidean spaces*, CPAM **39** (1986), no 16, Suppl, S3-S16.

[2] M. Belishev, *An approach to multidimensional inverse problems for the wave equation*, Dokl. Akad. Nauk SSSR, **297**, (1987), 524-527 (Engl. transl. Soviet Math. Dokl. 36 (1988), 481-484.

[3] M. Belishev and V. Kurylev, *To the reconstruction of a Riemannian manifold via its spectral data (BC-method)*, Comm. in P. D. E. **17** (1992), 767-804.

[4] D. Borthwick, *Spectral Theory of Infinite-Area Hyperbolic Surfaces*, Birkhäuser, Boston-Basel-Brlin (2000).

[5] J. Elstrode, F. Grunewald and J. Mennicke, *Groups Acting on Hyperbolic Space*, Springer (1997).

[6] L. D. Faddeev, *Expansion in eigenfunctions of the Laplace operator in the fundamental domain of a discrete group on the Lobacevskii plane*, Trudy Moscov. Mat. **17** (1967), 323-350; English transl. in Trans. Moscow Math. Soc. **17** (1967), 357-386.

[7] H. Isozaki, *Inverse spectral theory*, in *Topics in the Theory of Schrödinger Operators*, edit. H. Araki and H. Ezawa, World Scientific (2003), 93-143.

[8] H. Isozaki and Y. Kurylev, *Introduction to spectral theory and inverse problems on asymptotically hyperbolic manifolds*, arXiv 1102.5382.

[9] H. Isozaki, Y. Kurylev and M. Lassas, *Conic singularities, generalized scattering matrix and inverse scattering on asymptotically hyperbolic surfaces*, arXiv:1108.1577.

[10] H. Isozaki, Y. Kurylev and M. Lassas, *Recent progress of inverse scattering theory on non-compact manifolds*, preprint.

[11] M. Kashiwara, A. Kowata, K. Minemura, K. Okamoto, T. Oshima, M. Tanaka, *Eigenfunctions of invariant differential operators on a symmetric spaces*, Ann. Math. **107** (1978), 1-39.

[12] A. Katchalov, Y. Kurylev and M. Lassas, *Inverse Boundary Spectral Problems*, Chapman and Hall/CRC, Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics, **123** (2001).

[13] P. D. Lax and R. S. Phillips, *Scattering Theory for Automorphic Functions*, Princeton Univ. Press, Princeton, N.J. (1976).

[14] R. B. Melrose, *Geometric Scattering Theory*, Cambridge University Press, Cambridge (1995).

[15] A. Sá Barreto, *Radiation fields, scattering and inverse scattering an asymptotically hyperbolic manifolds*, Duke Math. J. **129** (2005) 407-487.

[16] A. Selberg, *Harmonic analysis and discontinuous groups in weakly symmetric Riemannin spaces with applications to Dirichlet series*, J. Indian Math. Soc. (N. S.) **20** (1956), 47-87.

[17] S. Zelditch, *Kuznecov sum formulae and Szegö limit formulae on manifolds*, Commun. in P. D. E. **17** (1992), 221-260.