

境界制御法

筑波大学数学系

磯崎 洋

Hyperbolic Neumann-Dirichlet map

7

$M = m$ -dim. compact manifold.

$$\begin{cases} \partial_t^2 u = \Delta_g u & \text{on } M \times (0, \infty), \\ u|_{t=0} = \partial_t u|_{t=0} = 0 & \text{on } M, \\ \partial_\nu u|_{\partial M \times (0, \infty)} = f \in C_0^\infty(\partial M \times (0, \infty)). \end{cases}$$

解 u^f に対して

$$\Lambda^h : f \rightarrow u^f|_{\partial M \times (0, \infty)}$$

を hyperbolic Neumann-Dirichlet map という.

問題

Question N-D map Λ^h から多様体 M と計量 g が定まるか？

Localized N-D map

$\Gamma \subset \partial M$ を与えて

$$\Lambda^h|_{\Gamma} : C_0^{\infty}(\Gamma \times (0, \infty)) \ni f \rightarrow u^f|_{\Gamma \times (0, \infty)} \in C^{\infty}(\Gamma \times (0, \infty)).$$

Question $\Lambda^h|_{\Gamma}$ から (M, g) が定まるか？

短い歴史

- 1951 M. G. Krein による 1 次元波動方程式の逆問題 (エネルギーに関する解析性に基づく?)
- 1971 Blagovestchenskii (波動, 特に有限伝播性に注目)
- 1987 M. I. Belishev (境界制御法による多次元逆問題)
- 1992 M. I. Belishev-Y. Kurylev (リーマン多様体上での境界制御法. Gelfand の問題の解決)

境界制御法の特徴

- 波動方程式を扱う. 有限伝播性を使う.
- 波動方程式の解の特異性は測地線に沿って伝わる. よって幾何と関連する.
- 摂動論的ではない. リーマン計量がある標準的な計量に近いということは仮定しない.

参考文献

- M. I. Belishev, Boundary control in reconstruction of manifolds and metrics (the BC method), *Inverse Problems* 13 (1997), R1-R45.
- M. I. Belishev, Recent progress in the boundary control method, *Inverse Problems* 23 (2007), R1-R67.
- A. Katchalov, Y. Kurylev and M. Lassas, *Inverse Boundary Spectral Problems*, Chapman and Hall, 123 (2001)

基本的なアイデア

境界上の函数のなす空間の中に元の多様体 M を実現する

BC 法におけるスペクトルからの重要ポイント

- 境界値問題の解の内積は Boundary Spectral Projection（スペクトルからのデータ）のみを用いて書ける. よって
- スペクトルからのデータのみに基づいた Hilbert 空間のなかで議論していることになる.

BC 法における PDE からの重要ポイント

- 境界値問題の一意可解性と解写像の surjectivity
- 特異性の伝播と Gaussian beam

BC 法における幾何からの重要ポイント

- 測地線による座標系の導入
- 距離からリーマン計量を定める

波動方程式

$$\begin{cases} \partial_t^2 u = \Delta_g u, & \text{on } M \times (0, \infty), \\ u|_{t=0} = \partial_t u|_{t=0} = 0, \\ \partial_\nu u|_{\partial M \times (0, \infty)} = f \in C_0^\infty(\partial M \times (0, \infty)). \end{cases}$$

Boundary Spectral Data

$-\Delta_g$ with Neumann B. C. の固有値 $\mu_1 < \mu_2 < \dots$ (重複度を考慮せず) と μ_k に付随する固有函数 $\varphi_{k,1}(x), \dots, \varphi_{k,\nu(k)}$ に対して

$$\{\mu_k, \varphi_{k,i}(x)|_{\partial M}; k = 1, 2, \dots, i = 1, \dots, \nu(k)\}$$

を boundary spectral data (BSD) と呼ぶ.

BSD, ND map, BSP

$$\begin{cases} (-\Delta_g - \lambda)u = 0, & \text{in } M, \\ \partial_\nu u = f, & \text{on } \partial M \end{cases}$$

の解 u に対して

$$\Lambda(\lambda) : f \rightarrow u|_{\partial M}$$

を Neumann-Dirichlet map という. その積分核は

$$\Lambda(\lambda; x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\nu(k)} \frac{\varphi_{k,i}(x)\varphi_{k,i}(y)}{\mu_k - \lambda} \Big|_{\partial M \times \partial M}$$

問題点

BSD から N-D map が定まる.

N-D map から μ_k は定まるが $\varphi_{k,i}(x)|_{\partial M}$ は定まらない. ($\mu(k)$ 次直交群の自由度がある.)

$S = \partial M$ とし trace operator $r_S \in \mathbf{B}(H^1(M); H^{1/2}(S))$
に対して $\delta_S \in \mathbf{B}(H^{-1/2}(S); H^{-1}(M))$ を

$$(\delta_S f, w)_{L^2(M)} = (f, r_S w)_{L^2(M)}, \quad f \in H^{-1/2}(S), \quad w \in H^1(M)$$

とすれば $r_S = \delta_S^*$ で

$$\Lambda(\lambda) = \delta_S^*(-\Delta_g - \lambda)^{-1}\delta_S$$

P_k を固有値 μ_k に対する eigenprojection とすれば

$$\Lambda(\lambda) = \sum_k \frac{\delta_S^* P_k \delta_S}{\mu_k - \lambda}$$

であるから, N-D map は

$$\left\{ \mu_k, \delta_S^* P_k \delta_S; k = 1, 2, \dots \right\}$$

と同等. これを Boundary Spectral Projection (BSP) と呼ぶ.

境界スペクトルデータ (BSD) の役割

- 当面 M をコンパクト多様体とする.

解 $u^f(x, t)$ を Fourier 展開する.

$$u^f(x, t) = \sum_k u_k^f(t) \varphi_k(x), \quad u_k^f(t) = (u^f(t), \varphi_k)_{L^2(M)},$$

$$u_k^f(t) = \int_0^t ds \int_{\partial M} dS_g \frac{\sin(\sqrt{\lambda_k}(t-s))}{\sqrt{\lambda_k}} f(y, s) \varphi_k(y).$$

$u^f(t)$ は BSD だけで表わされている.

Blagovestchenskii's identity

$$(u^f(t), u^h(s))_{L^2(M)} = \sum_k u_k^f(t) \overline{u_k^h(s)}$$

i.e. 内積 $(u^f(t), u^h(s))_{L^2(M)}$ は BSP のみで書ける!

有限伝播性の役割

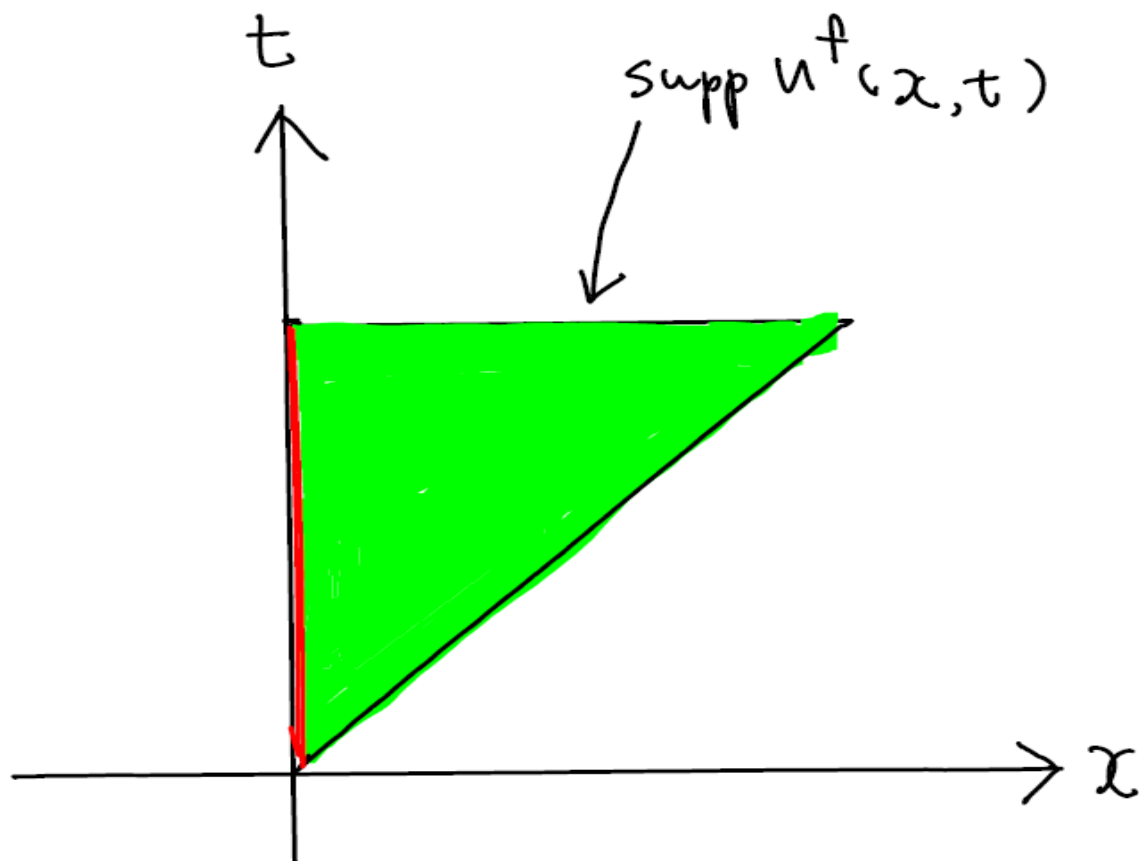
$\Gamma \subset \partial M$ をとり $\text{supp } f(\cdot, t) \subset \Gamma$ とする.

$$M(\Gamma, t_0) = \{x \in M; \text{dist}(x, \Gamma) < t_0\}$$

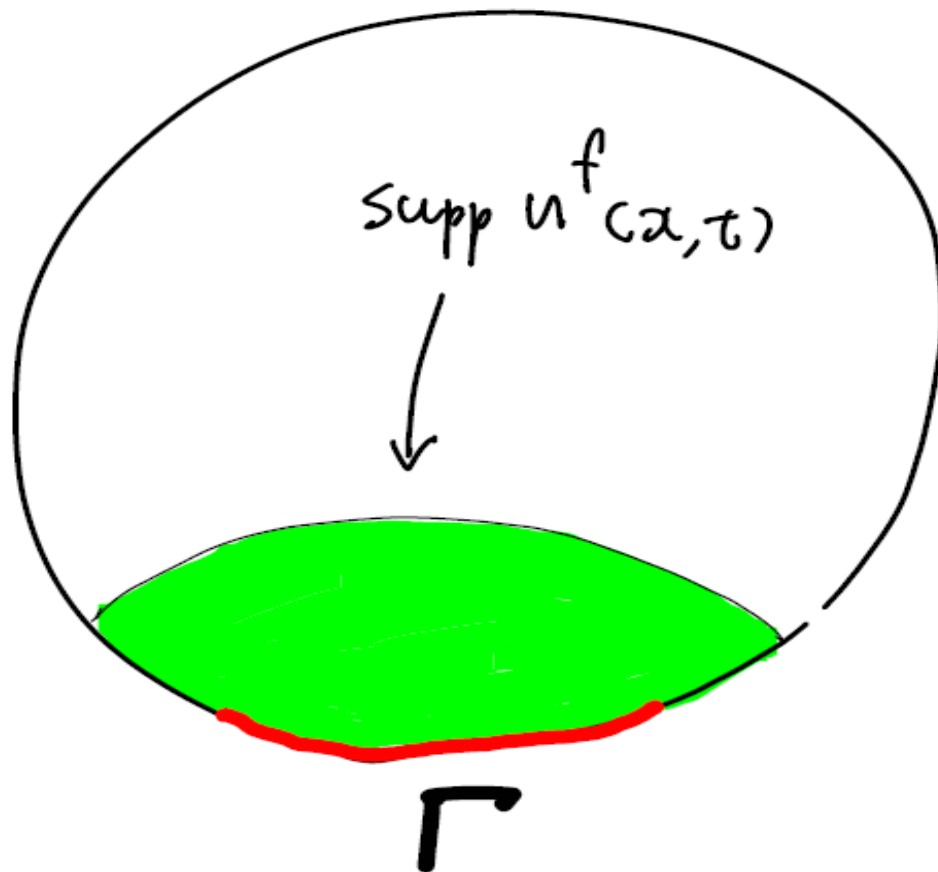
とおけば, 有限伝播性により

$$\text{supp } u^f(t) \subset M(\Gamma, t_0)$$

1次元では



2次元では



境界制御

$$\mathcal{U}(\Gamma, t_0) = \overline{\{u^f|_{t=t_0}; f \in C_0^\infty(\Gamma \times (0, t_0))\}} \quad \text{in } L^2(M)$$

とおけば

定理 $\mathcal{U}(\Gamma, t_0) = L^2(M(\Gamma, t_0))$

これが何故、制御か？

- 熱方程式の場合には、境界の温度をコントロールすることによって、与えられた時刻での物体内部の温度分布を自由に変えられることを意味する。

これは次のような一意性の定理から従う

$$K(\Gamma, t_0) = \{(x, t); \text{dist}(x, \Gamma) \leq t_0 - |t|\}$$

とおく.

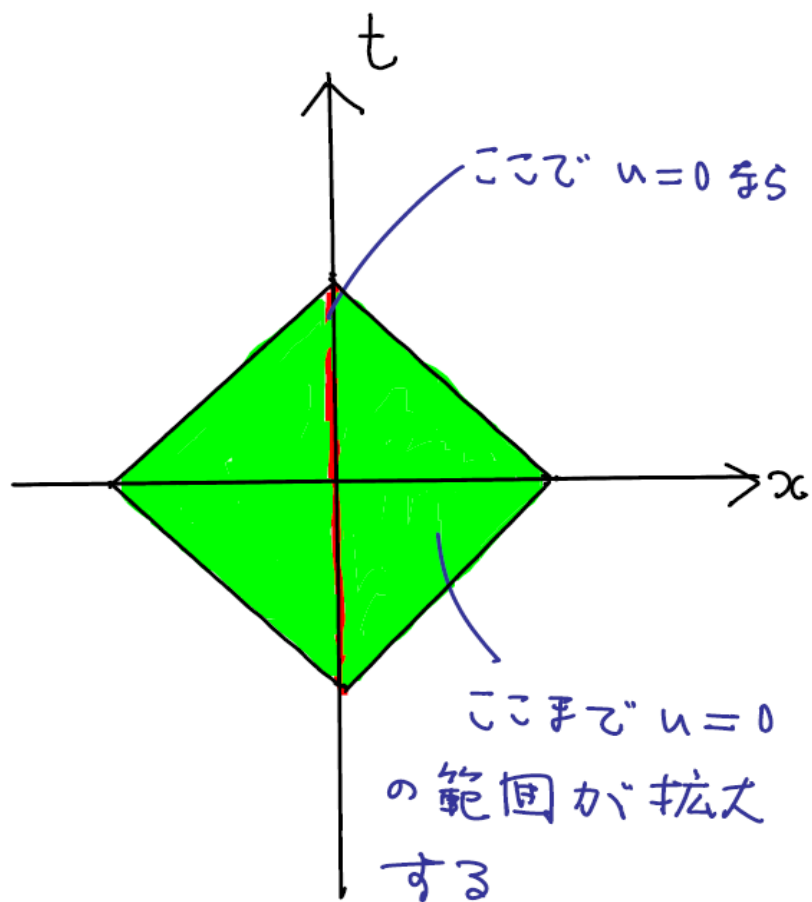
定理 u が

$$\begin{cases} \partial_t^2 u = \Delta_g u & \text{in } M \times (-t_0, t_0), \\ \partial_\nu u|_{\Gamma \times (-t_0, t_0)} = 0, & u|_{\Gamma \times (-t_0, t_0)} = 0 \end{cases}$$

をみたせば

$$u = 0 \quad \text{in } K(\Gamma, t_0)$$

1次元では



Holmgren-John の一意性定理

- 1901 E. Holmgren (解析的係数)
- 1949 F. John
- 1991 L. Robbiano
- 1992 L. Hormander
- 1995 D. Tataru (無限回微分可能係数)

以下 BC 法の解説を

- 最初は M がコンパクトの場合を考える.

1st Step of BC-method

$\Gamma \subset \partial M$ に対して

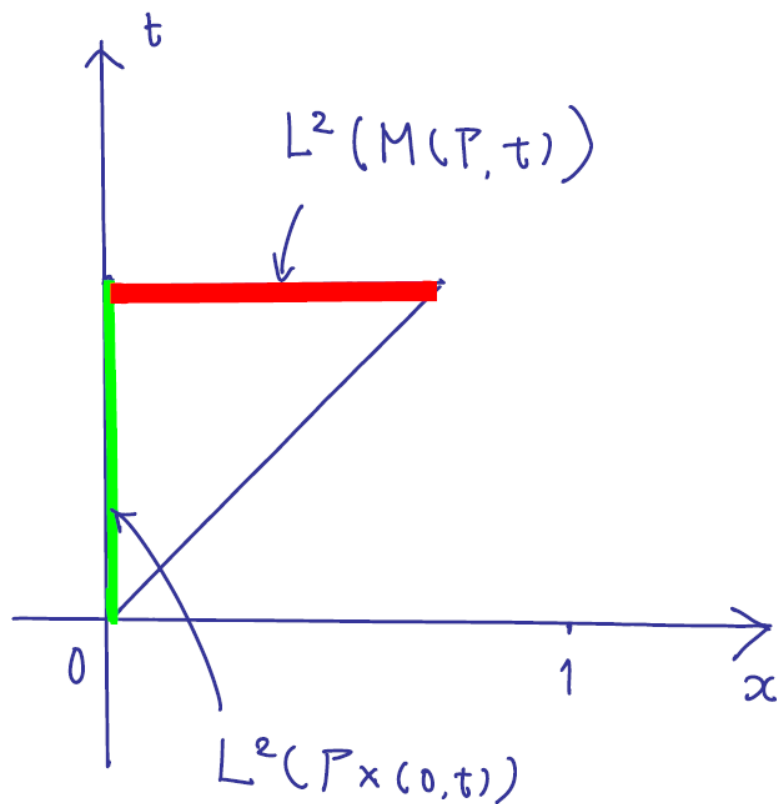
$$M(\Gamma, t) = \{x \in M; \text{dist}(x, \Gamma) < t\}$$

$$W(\Gamma, t)f = u^f(t)$$

とおけば

定理 $W(\gamma, t) : L^2(\Gamma \times (0, t)) \rightarrow M(\Gamma, t)$ は bijection

1次元では



境界距離函数 (Boundary distance function)

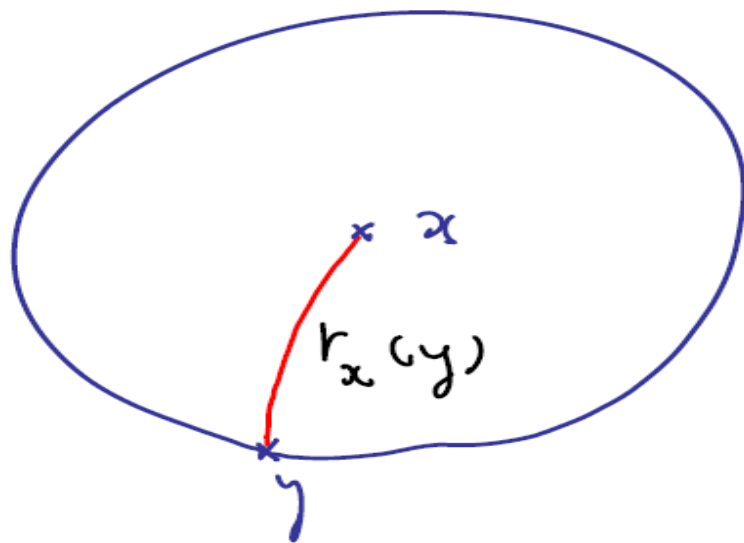
$x \in M$ に対して

$$r_x(y) = \text{dist}(x, y), \quad y \in \partial M$$

とおく.

$$R(M) := \{r_x; x \in M\} \subset L^\infty(\partial M)$$

$$R(M) = \{r_x : x \in M\}$$



境界制御法の解析的な本体

BSP から $R(M)$ を構成できる

まず幾何的な側面を

- $R(M)$ が再構成されたとすると, あとの議論は幾何学的なものばかりである.

重要な定理

定理 写像 $R : M \rightarrow R(M)$ は同相

この証明は知っておいた方がよい

$\|r_x - r_y\|_{L^\infty(\partial M)} \leq d(x, y)$ により $R: M \rightarrow R(M)$ は連続. R が 1 to 1 であることを示す. $r_x = r_y$ とし, $s = \min r_x = \min r_y$ とおく. $z \in \partial M$ を $r_x(z) = s$ となるようにとる. z は x と ∂M の最短距離を与える点. よって x は z から法線方向に出発する測地線上にある. y も同じ. よって $x = y$ である.

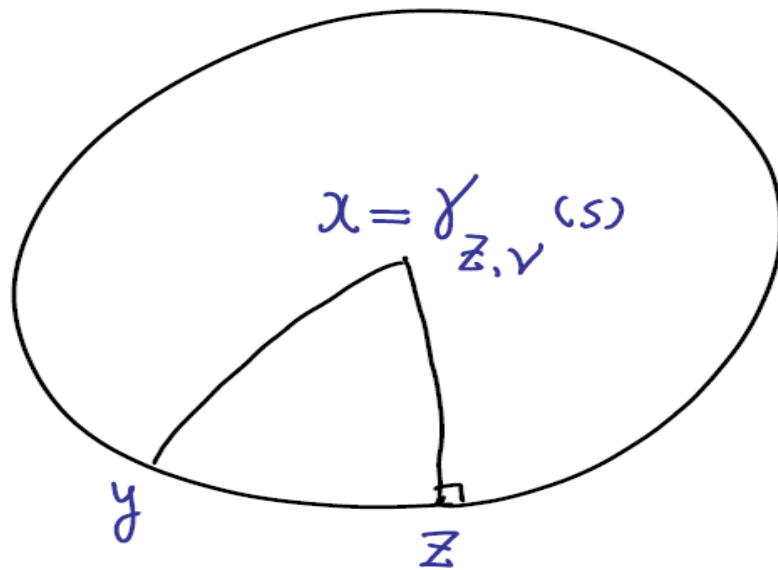
$R: M \rightarrow R(M)$ は 1 to 1, conti, M はコンパクト. よって R は onto (by general topology).

距離から計量を求める

補題 $\Gamma \subset \partial\Omega$ をとり $\gamma_{z,\nu}(s)$ を $z \in \Gamma$ から出発し、初期方向が内向き単位法線 ν である測地線とする。このとき、 $\forall y \in \Gamma$ に対して

$$\text{dist}(\gamma_{z,\nu}(s), y), \quad 0 < s < \exists T$$

は BSP のみによって計算される。



$$r_x(y) = \text{dist}(x, y)$$

$x = \gamma_{z,\nu}(s)$ とおくと $\text{dist}(x, y)$ は BSP のみによって与えられ, s と z の関数として表わされる.

計量の再構成

$\text{dist}(x, y) = f(s, z; y)$ とおく. $f(s, z; y)$ が distance であることより

$$|\nabla_{s,z} f(s, z; y)|_g = 1$$

これより

$$g^{ij} v_i v_j = 1$$

ただし $v_i = \partial_s f$ or $\partial_w f$ (w は $\partial\Omega$ の local coordinates). $z \in \partial\Omega$ を動かせば v_i も動く. これから g^{ij} が求められる.

解析的側面

Gaussian beam = 測地線に集中した解

$$(\partial_t^2 - \Delta_g)u_\epsilon(x, t) = O(\epsilon^N),$$

$$u_\epsilon(x, t) = \epsilon^{-n/2} e^{i\theta(x, t)/\epsilon} \sum_{j=0}^N u_j(x, t) \epsilon^j,$$

$$\text{Im } \theta(x, t) \geq C(t) \text{dist}(x, x(t))^2, \quad C(t) > 0,$$

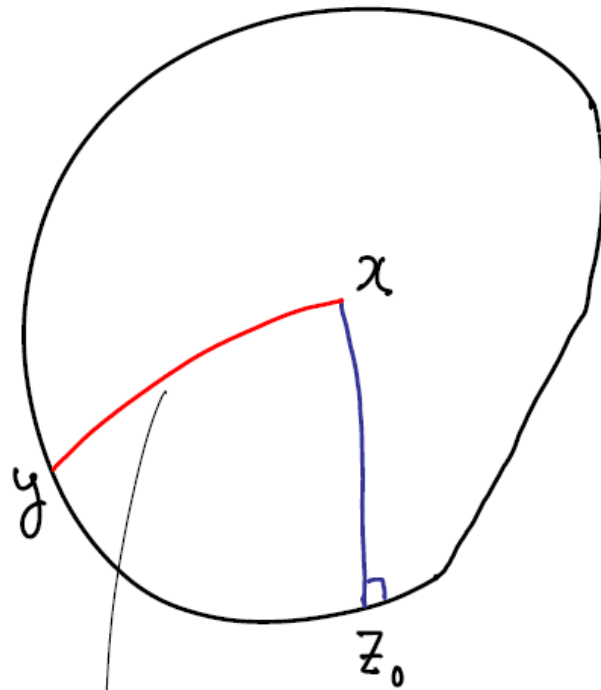
$$\text{Im } \theta(x(t), t) = 0,$$

$x(t)$ は測地線

Gaussian beam を用いて分かること

$\gamma_{z_0, \nu}(s)$ を $z_0 \in \partial M$ から法線 ν 方向に出発した測地線とする. $y \in \partial M$ を任意にとる.

\implies BSP から $\text{dist}(\gamma_{z_0, \nu}(s), y)$ が計算できる.



$\text{dist}(\gamma_{z_0, v}(s), y)$

R(M) の構成

$$x = \text{dist}(\gamma_{z_0, \nu}(s), y)$$

とおくと,

$$\text{dist}(\gamma_{z_0, \nu}(s), y) = \text{dist}(x, y) = r_x(y)$$

よって boundary distance function $r_x(y)$ が Gaussian beam を用いて計算できた.

どう計算するのか？

1次元の場合,

$$f_\epsilon(t) = (\pi\epsilon)^{-1/4} \exp\left(\frac{i\theta(t-a)}{\epsilon}\right)$$

$$i\theta(t-a) = -i(t-a) - \frac{(t-a)^2}{2}$$

という境界データを与える.

解は

$$u_\epsilon(x, t; a) = (\pi)^{-1/4} \exp\left(\frac{i\theta(t - x - a)}{\epsilon}\right) (1 + \dots)$$

$$P_\tau u(x) = \chi_{(0,\tau)}(x)u(x),$$

($\chi_{(0,\tau)}(x)$ は $(0, \tau)$ の特性関数), とすると

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \langle P_\tau u_\epsilon(\cdot, t; a), u_\epsilon(\cdot, t; a) \rangle = \begin{cases} 0, & \tau < t - a, \\ 1, & \tau > t - a \end{cases}$$

左辺は BSP のみによって計算される.

これが意味することは？

境界 $x = 0$ に時刻 a で集中するデータを与えた。このとき解は時刻 $t - a$ で $x = \tau$ の地点に到達した。

多次元の場合

境界上に次のようなデータを与える.

$$f_\epsilon(z, t) = (\pi\epsilon)^{-n/4} \exp\left(\frac{i\theta(z, t)}{\epsilon}\right),$$

$$i\theta(z, t) = -i(t - t_0) + \frac{i}{2} (\operatorname{Re} H_0(z - z_0), z - z_0) \\ - \frac{1}{2} (\operatorname{Im} H_0(z - z_0), z - z_0) - \frac{(t - t_0)^2}{2},$$

$$z_0 \in \partial M, t_0 \in \mathbf{R}, \operatorname{Im} H_0 > 0.$$

解は次のような形になる.

$$u_\epsilon(x, t) = (\pi\epsilon)^{-n/4} \exp\left(\frac{i\theta(x, t)}{\epsilon}\right) (1 + \cdots),$$

$$\theta(x, t) = \sum_{m \geq 1} \theta_m(x, t),$$

$$\theta_1(x, t) = \sum_{j=1}^n p_j(t) (x^{j,0} - x^j(t)),$$

$x^j(t), p_j(t)$ は Hamilton 方程式の解 (測地線) ,

$$\theta_2(x, t) = \frac{1}{2} (H(t)(x - x(t), x - x(t)),$$

$$\text{Im } H(t) > C > 0.$$

$y \in \partial M$ とし, 領域

$$M(y, \tau) = \{x \in M ; \text{dist}(x, y) < \tau\}$$

の特性函数をかける projection を $P_{y, \tau}$ とすると

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \langle P_{y, \tau} u_{\epsilon}(\cdot, t), u_{\epsilon}(\cdot, t) \rangle = \begin{cases} \alpha(t) > 0, & x(t) \in M(y, \tau), \\ 0, & x(t) \notin M(y, \tau). \end{cases}$$

左辺は BSP のみから計算される.

これは何を意味するか？

時刻 t_0 で境界上の点 z_0 に集中するデータを与える. 解が $y \in \partial M$ からの距離 τ の点に到達する時間は BSP のみから計算される. よって測地線 $\gamma_{z_0, \nu}(s)$ と y との距離は BSP のみから計算される.

局所的から大域へ

