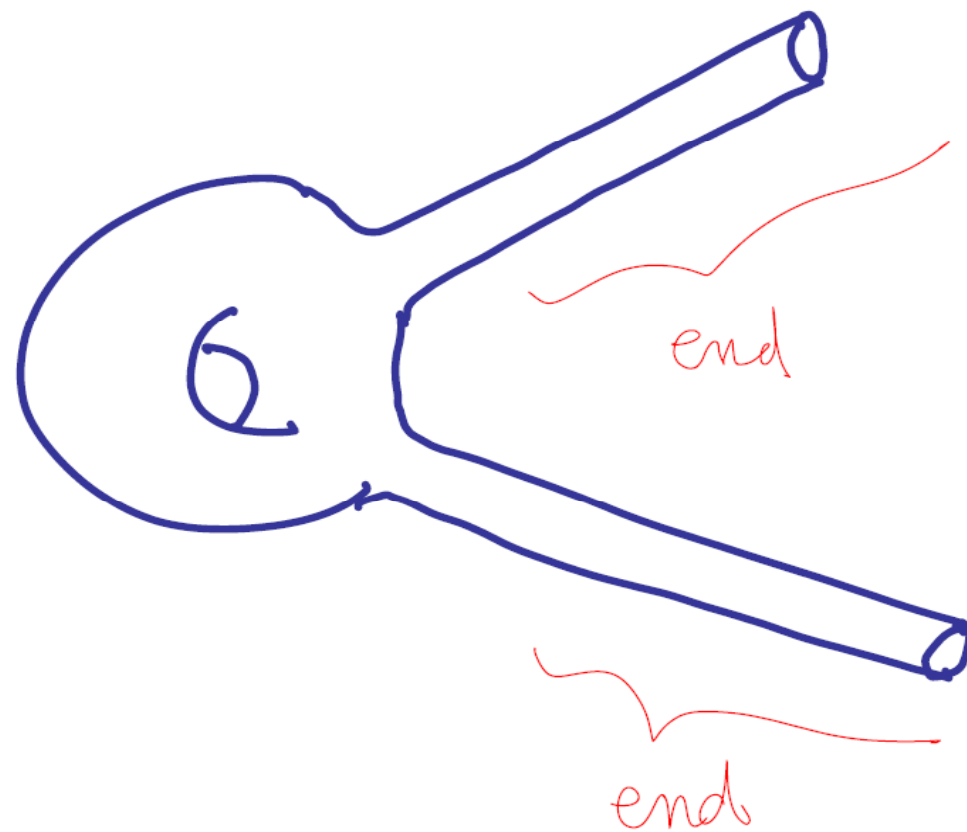


# 漸近的双曲計量に関する 逆散乱問題

筑波大学大学院数理物質科学研究科

磯崎 洋

# 考える多様体



# 結果を大まかに言えば



- 一つの end から波を入れてその end に戻ってくる波を観察する.
- 観察結果が等しければこのような2つの多様体は等長である.

# 例としては



- 双曲多様体（漸近的双曲計量）
- Waveguide（漸近的柱状計量）

# Poincare disc への離散群の作用(1)

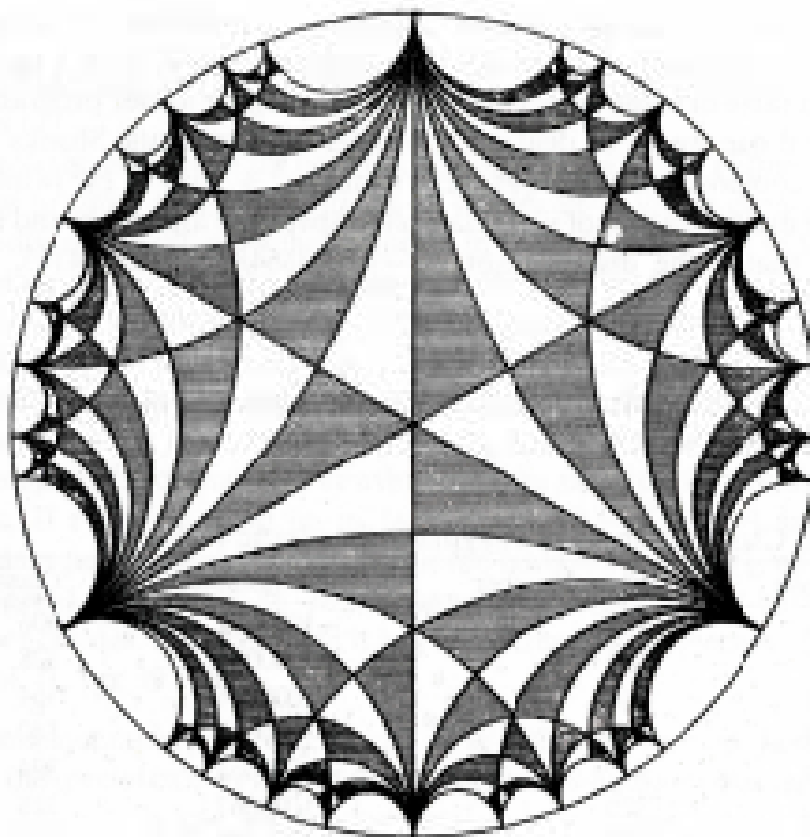


Figure 3.17. Another tessellation of the unit disc. (From Klein and Fricke [1]. Reprinted by permission of Teubner.)

# Poincare disc への離散群の作用(2)

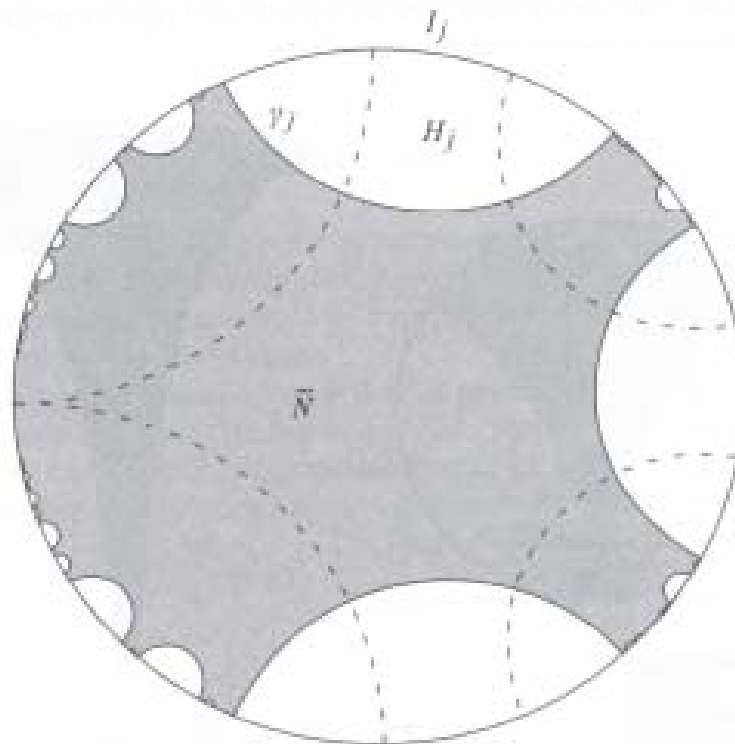


Fig. 2.8. Nielsen region.

- この絵では点線が基本領域の境界

# Moebius 変換

$$\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, R)$$

の  $C_+ = \{z \in C ; \text{Im } z > 0\}$  への作用は

$$z \in C_+ \rightarrow \gamma \cdot z = \frac{az+b}{cz+d}$$

# 幾何学的有限な離散群

$SL(2, \mathbb{R}) \supset \Gamma$  : discrete subgroup,

$\mathcal{M} = \Gamma \backslash \mathbb{H}^2$  : fundamental domain.

$\Gamma$  is geometrically finite

$\iff M$  is a finite-sided convex polygon

$\iff \Gamma$  is finitely generated.



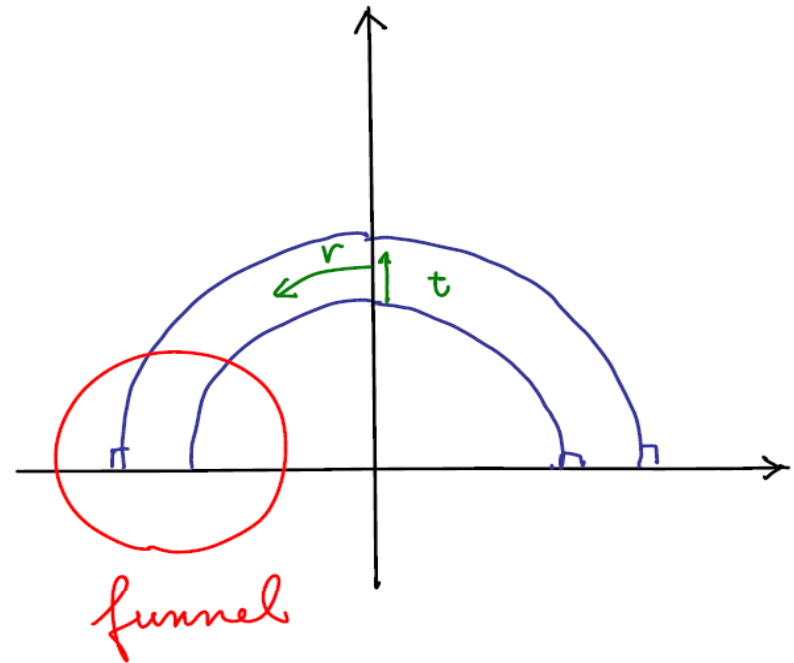
# 引き伸ばし

$$\Gamma: z \rightarrow \lambda z \ (\lambda > 1)$$

$$ds^2 = (dr)^2 + \cosh^2 r (dt)^2$$

$$(y = 2e^{-r})$$

$$= \left( \frac{dy}{y} \right)^2 + \left( \frac{1}{y} + \frac{y}{4} \right)^2 (dt)^2$$

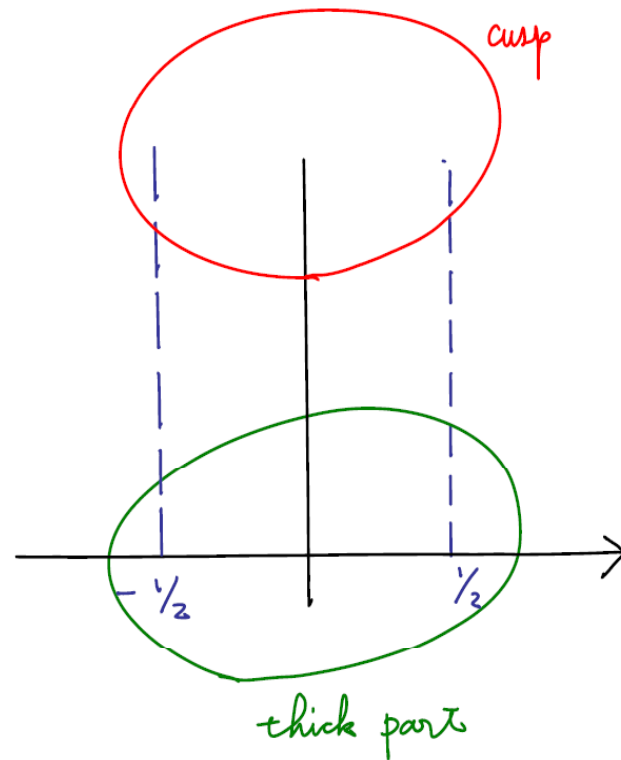


# 平行移動

$$\Gamma : z \rightarrow z + 1,$$

$$M = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \times (0, \infty),$$

$$ds^2 = \frac{(dx)^2 + (dy)^2}{y^2}$$



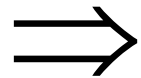
# 重要な注意

- Funnel の無限遠点の近傍では計量は

$$ds^2 = \frac{(dy)^2 + (1 + O(y^2))(dx)^2}{y^2}$$

## 2次元双曲多様体の分類 (やや大まかに)

□ **定理**  $M = \Gamma \backslash H^2$  が non-elementary,  
geometrically finite なら



$\exists K$  compact set such that  
 $M \setminus K$  は cusp と funnel の有限和

# Model space

- $M$  を  $n-1$  dim. Compact manifold として

$$\Omega = M \times (0, \infty),$$

$$ds^2 = \frac{(dy)^2 + h(x, dx)}{y^2}$$

を考える.  $h(x, dx)$  は  $M$  のリーマン計量

- Laplace-Beltrmi operator は

$$H_0 = -y^2(\partial_y^2 + \Delta_M) + (n-2)\partial_y - \frac{(n-1)^2}{4}$$

# Regular end と Cusp

- ここだけの呼び方であるが

$y = 0$  を regular な end

$y = \infty$  を cusp (これは一般的な用語)

と呼ぶことにする.

# 漸近的双曲多様体

$$\Omega = K \cup \Omega_1 \cup \cdots \cup \Omega_N$$

- $\overline{K}$  は compact
- $\Omega_i \cap \Omega_j = \phi \quad (i \neq j)$
- 各  $\Omega_i$  は

$\Omega_0 = M \times (0,1)$  か  $\Omega_\infty = M \times (1,\infty)$  に

diffeomorphic

# 計量に対する仮定

□ 各  $\Omega_i$  において

$$ds^2 = y^{-2} \left( (dy)^2 + h_i(x, dx) + A_i(x, y, dx, dy) \right),$$

$$|\tilde{D}_x^\alpha D_y^m a_{i,kj}(x, y)| \leq C_{\alpha m} (1 + |\log y|)^{-m-1-\varepsilon},$$

$$D_y = y \partial_y, \quad \tilde{D}_x = \tilde{y}(y) \partial_x,$$

$$\tilde{y}(y) = \begin{cases} y & (y > 2), \\ 1 & (0 < y < 1) \end{cases}$$



# スペクトル構造

$$H = -\Delta_g - (n-1)^2/4$$

とおくと

$$\sigma_{dis}(H) \subset (-\infty, 0), \quad \sigma_{ess}(H) = [0, \infty)$$

□ 少なくとも一つの end が regular なら

$$\sigma_p(H) \cap (0, \infty) = \emptyset$$

# 連続スペクトルの中に埋め込まれた固有値

- すべての end が cusp なら  $(0, \infty)$  の中に固有値が埋め込まれている可能性があるが、それらは離散的で、対応する固有ベクトルは無遠方で急減少する。

# End の仮定

□ 以下,

$$\Omega_1, \dots, \Omega_m$$

は regular end を持ち

$$\Omega_{m+1}, \dots, \Omega_N$$

は cusp であるとする.

# Resolvent の無限遠点での挙動

□  $R(z) = (H - z)^{-1}$  とおく.

$$R(k^2 + i0)f \cong \omega_+(k) \sum_{j=1}^m \chi_j y^{(n-1)/2-ik} F_j(k) f$$
$$+ \omega^{(c)}(k) \sum_{j=m+1}^N \chi_j y^{(n-1)/2+ik} F_j(k) f$$

# 無限遠点での $L^2$ 空間

---

$$h_{\infty} = \left( \bigoplus_{i=1}^m L^2(M_i) \right) \oplus \left( \bigoplus_{i=m+1}^N \mathbb{C} \right)$$

# フーリエ変換

$$F(k) = (F_1(k), \dots, F_N(k)),$$

$$(Ff)(k) = F(k)f,$$

$$\hat{H} = L^2((0, \infty); h_\infty; dk)$$


とおけば

(1)  $f \in L^2(M) \rightarrow F(k) \in \hat{H}$  は有界作用素で

$$\text{Ran } F = \hat{H},$$

$$\|f\| = \|Ff\|, \quad f \in H_{ac}(H),$$

$$Ff = 0, \quad f \in H_p(H)$$


$$(2) \quad (FHf)(k) = k^2 (Ff)(k), \quad f \in D(H).$$

$$(3) \quad F(k)^* \in B(h_\infty; B^*),$$

$$(H - k^2)F(k)^* \psi = 0, \quad \psi \in h_\infty.$$

$$(4) \quad f \in H_{ac}(H),$$

$$f = \sum_{j=1}^N \int_0^\infty F_j(k)^* (F_j f)(k) dk$$

# Helmholtz方程式の解空間



$$\left\{ u \in B^* ; (H - k^2)u = 0 \right\} = F(k) * h_\infty$$



# Helmholtz方程式の解の漸近展開

□  $(H - k^2)u = 0$  を満たす  $u \in B^*$  は

$$\begin{aligned} u \cong & \omega_-(k) \sum_{p=1}^m \chi_p y^{(n-1)/2+ik} \psi_p^{(-)} \\ & + \omega_-^{(c)}(k) \sum_{p=m+1}^N \chi_p y^{(n-1)/2-ik} \hat{\psi}_{p0}^{(-)} \\ & - \omega_+(k) \sum_{p=1}^m \chi_p y^{(n-1)/2-ik} \psi_p^{(+)} \\ & + \omega_+^{(c)}(k) \sum_{p=m+1}^N \chi_p y^{(n-1)/2+ik} \hat{\psi}_{p0}^{(+)}, \end{aligned}$$

$$\psi^{(\pm)} \in h_\infty$$

# S行列

□ 任意の  $\psi^{(-)} \in h_{\infty}$  に対して  $(H - k^2)u = 0$

の解  $u \in B^*$  と  $\psi^{(+)} \in h_{\infty}$  が唯一つ存在

し、上の展開が成り立つ。

$$S(k) : \psi^{(-)} \rightarrow \psi^{(+)}$$

とすれば  $S(k)$  はユニタリーである。

# 逆散乱問題 (Y.Kurylev-H.I.)

□ **定理** 上のような多様体  $\Omega^{(1)}, \Omega^{(2)}$  が与えられ,  
その  $\text{End } \Omega_1^{(1)}, \Omega_1^{(2)}$  は regular であり, かつ等長,

さらに

$$S_{11}^{(1)}(k) = S_{11}^{(2)}(k), \quad k > 0$$

ならば  $\Omega^{(1)}$  と  $\Omega^{(2)}$  は等長である.

# 証明のアイデア

- End  $\Omega_1$  を仮想的な境界で仕切り, 多様体を2つに分割する.
- End  $\Omega_1^{(1)}, \Omega_1^{(2)}$  における  $s$  行列の成分が等しいことから「内部問題」の Neumann-Dirichlet 写像が一致する.
- 境界制御法 (Boundary Control method) によって計量を再構成する.

# Cusp からの逆散乱 (Y.Kurylev-M.Lassas-H.I)

- Cusp での入射波, 反射波から計量を再構成することも可能である.
- この場合はS行列の意味を一般化し, Cusp において指数的に増加, 減少する波も考慮する.
- 双曲多様体においては elliptic fixed points において計量が特異性を持っており, orbifold の構造を持っている.
- 以上のことを考慮して, 少なくとも2次元の場合の  
第1種 Fuchs 群  
から生ずる双曲多様体を扱うことは可能である.