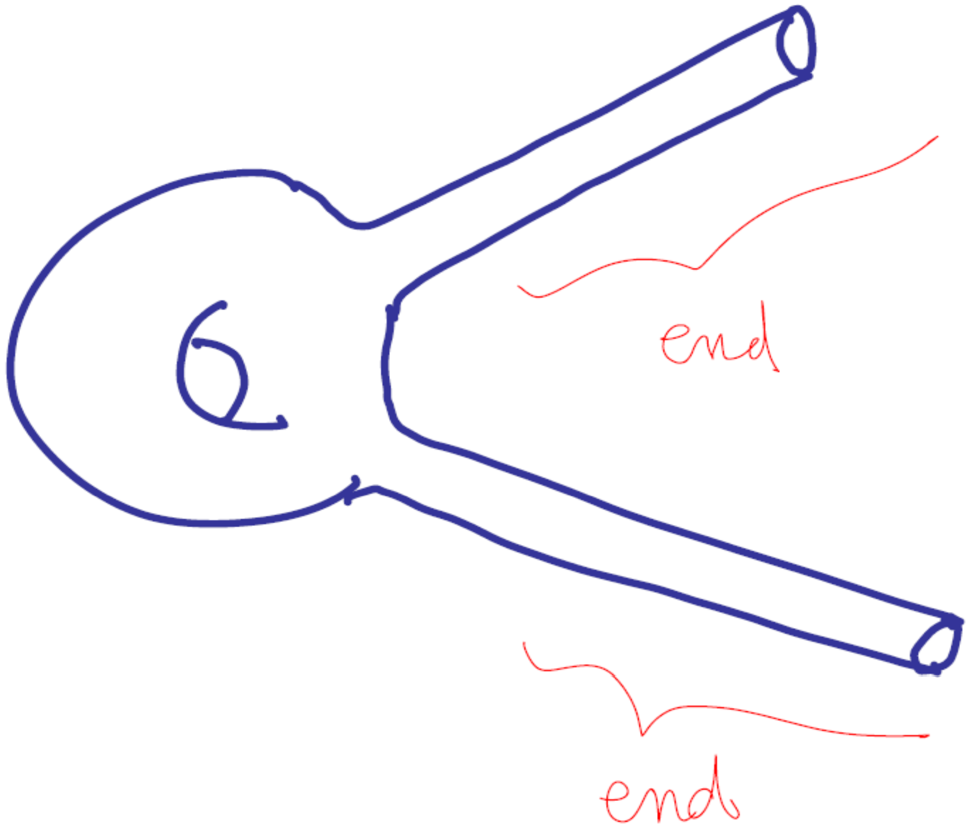
WAVE GUIDE に関する逆散乱問題

筑波大学大学院数理物質科学研究科

磯崎　洋

考える多様体



各 end が柱状多様体に漸近する場合を考える

- 水, ガス, 油, 等のパイプラインが例

Model space

- M を n-1 dim. compact manifold として

$$\Omega = M \times (0, \infty),$$

$$ds^2 = (dy)^2 + h(x, dx)$$

を考える. $h(x, dx)$ は M のリーマン計量

- Laplace-Beltrami operator は

$$H_0 = -\partial_y^2 - \Delta_M$$

漸近的柱状多様体

$$\Omega = \mathrm{K} \cup \Omega_1 \cup \cdots \cup \Omega_N$$

- $\overline{\mathrm{K}}$ は compact
- $\Omega_i \cap \Omega_j = \phi \quad (i \neq j)$
- 各 Ω_i は $M_i \times (1, \infty)$ に diffeomorphic

計量に対する仮定

- 各　Ω_i　において

$$ds^2 = (dy)^2 + h_i(x, dx) + A_i(x, y, dx, dy),$$

$$|\partial_x^\alpha \partial_y^m a_{i,kj}(x,y)| \le C_{\alpha m}(1+|y|)^{-1-\varepsilon},$$

境界条件

境界はあってもなくてもよいのだが, 境界を持つ場合には Dirichlet あるいは　Neumann　境界条件を仮定する.

スペクトル構造

$$H = -\Delta_g$$

とおくと

$$\sigma_{dis}(H) \subset (-\infty, 0), \quad \sigma_{ess}(H) = [0, \infty)$$

連続スペクトルの中に埋め込まれた固有値

- $(0,\infty)$ の中に固有値が埋め込まれている可能性があるが，それらは離散的で，対応する固有ベクトルは無限遠方で急減少する．

Model space での作用素

- $M\times(0,\infty)$ において Neumann 条件を課した

$$H_0 = -\partial_y^2 - \Delta_M,$$

$$\partial_\nu u = 0$$

を考える.

Wave Profile

- 波動方程式の解の $t \to \pm\infty$ での挙動を考える

$$\partial_t^2 u = \Delta_g u,$$

$$u|_{t=0} = f,\ \partial_t u|_{t=0} = -i\sqrt{-\Delta_g}\, f.$$

$$f \perp H_p(-\Delta_g),$$

$$u(t) = e^{-it\sqrt{-\Delta_g}} f = \sum_{j=1}^{N} e^{-it\sqrt{H_{0j}}} f_j^{(\pm)} + o(1)$$

Scattering operator

無限遠点におけるデータ (Wave profile)

$$f^{(\pm)} = (f_1^{(\pm)}, \ldots, f_N^{(\pm)})$$

の対応を与える作用素

$$S : f^{(-)} \to f^{(+)}$$

を Scattering operator という.

Cosine transform

i 番目の end における $-\Delta_{M_i}$ の固有値を

$$\lambda_{i,1} < \lambda_{i,2} \leq \cdots$$

対応する固有射影を $P_{i,n}$ として

$$F_{i,n}^{(0)}(\lambda) f(x) = \pi^{-1/2} (\lambda - \lambda_{i,n})^{-1/4} \int_0^\infty \cos(y\sqrt{\lambda - \lambda_{i,n}}) P_{i,n} f(y) dy,$$

$$F_i^{(0)}(\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{(\lambda_{i,n},\infty)}(\lambda) F_{i,n}^{(0)}(\lambda)$$

$$\hat{H}_j = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} f_n(\lambda)\varphi_{j,n}(x); f_n(\lambda) \in +L^2((\lambda_{j,n},\infty); d\lambda) \right\}$$

$$\hat{H} = \oplus_{j=1}^{N} \hat{H}_j$$

$$F^{(0)} = (F_1^{(0)}, \cdots, F_N^{(0)})$$

とおくと

$$F^{(0)} : \oplus_{j=1}^{N} L^2((0,\infty); L^2(M_j)) \to \hat{H}$$

へのユニタリー

S行列

$$\hat{S} = F^{(0)} S (F^{(0)})^*$$

とおくと

$$(\hat{S}f)(\lambda) = \hat{S}(\lambda) f(\lambda), \quad f \in \hat{H}$$

$$\hat{S}(\lambda) = (\hat{S}_{ij}(\lambda))_{1 \le i, j \le N},$$

$$\hat{S}_{ij}(\lambda) \in B(L^2(M_j); L^2(M_i))$$

$\hat{S}_{ij}(\lambda)$ は無限の過去での end Ω_j における波 $f_j^{(-)}$ に対して, 無限の未来での end Ω_i における波の形 $f_i^{(+)}$ を対応させる

重要な仮定

- 1 番目の end は exact に柱状でかつ等長

$$\Omega_1^{(1)} = \Omega_1^{(2)},$$

$$G_1^{(1)} = G_1^{(2)} = (dy)^2 + h_1(x, dx)$$

逆散乱問題 (Y.Kurylev-M.Lassas-H.I.)

- **定理** 上のような多様体 $\Omega^{(1)}, \Omega^{(2)}$ が与えられ,

その End $\Omega_1^{(1)}, \Omega_1^{(2)}$ は 等長, また

$$S_{11}^{(1)}(k) = S_{11}^{(2)}(k), \quad k > 0$$

ならば $\Omega^{(1)}$ と $\Omega^{(2)}$ は等長である.

証明のアイディア(1)

- End Ω_1 において指数的に増大する波と指数的に減少する波(物理現象とは合わない)を導入し、

- この非物理的散乱行列は物理的散乱行列からの解析接続によって得られる.

証明のアイディア(2)

- End Ω_1 を仮想的な境界で仕切り, 多様体を2つに分割する.
- End $\Omega_1^{(1)}, \Omega_1^{(2)}$ における S 行列(物理的、非物理的双方)の成分が等しいことから「内部問題」の Neumann-Dirichlet 写像が一致する.
- 境界制御法（Boundary Control method）によって計量を再構成する.